Лекция 4_Қозғалыс теңдеулерінің жалпы көрінісі

ЖСТ негізгі ұғымдарынің бірі ол Альберт Эйнштейн Ньютонның гравитация теориясын алмастыратын және оны арнайы салыстырмалық теориясын қамтитын гравитация теориясы болып табылады. ЖСТ негізгі идеяларына мыналар жатады:

1. Эквиваленттілік принципі: Бұл принцип гравитациялық күш пен үдеудің тікелей әсерін бақылаушы ажырата алмайтынын айтады. Бұл гравитация мен сол күштің әсерінен болатын үдеу арасында ешқандай айырмашылық жоқ дегенді білдіреді.
2. Кеңістік-уақытының геометриясы: ЖСТ– бұл масса мен энергия кеңістік-уақытты қисайтатын геометриялық теория. Бұл қисаю гравитацияны сипаттайтын метрикалық тензор арқылы анықталады. Гравитация массаға әсер ететін күш ретінде емес, кеңістік-уақыттың геометриялық құрылымының әсері ретінде қарастырылады.

3. Эйнштейн теңдеулері: ЖСТ негізгі математикалық құралы метрикалық тензорды масса мен энергияның кеңістік-уақыттағы таралуымен байланыстыратын Эйнштейн теңдеулері болып табылады. Эйнштейн теңдеулерін былай жазуға болады:

$$G_{\mu\nu} = 8\,\pi T_{\mu\nu} \tag{1}$$

Мұндағы: $G_{\mu\nu}$ – метрикаға және оның туындыларына тәуелді Эйнштейн тензоры; $T_{\mu\nu}$ – масса мен энергияның кеңістік-уақыттағы таралуын сипаттайтын энергия-импульстік тензоры; G - гравитация тұрақтысы.

Эйнштейн теңдеулері масса мен энергияның кеңістік-уақытты қалай қисайтатынын және қисайған кеңістік-уақыттың гравитация әсерінен заттардың қозғалысына қалай әсер ететінін сипаттайды.

ЖСТ эффекттері: гравитациялық қызыл ығысу, гравитациялық линзалау, гравитациялық толқындар және т.б. сияқты құбылыстарды қатарынан тудырады. Бұл әсерлер белгілі тәжірибелер мен бақылаулар арқылы сәтті расталған.

Айналмалы массивтік шар өрісіндегі материалдық бөлшектің финитті қозғалысы туралы есепті алғаш рет Лензе мен Тирринг зерттеген [1, 426 б.]. Олардың бастапқы метрикасы

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U\right]dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\left(dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2\right) +$$

$$+ \frac{8}{c^2}\left(U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3\right)dt\,. \tag{2}$$

Енді біз бұл мәселені бірінші жуықтаудың біршама қысқартылған метрикасының негізінде қарастырсақ

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2}\right]dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\left(dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2\right) +$$

$$+ \frac{8}{c^2}\left(U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3\right)dt. \qquad (3)$$

Белгілі бір шекті аймақта стационар қозғалатын денелер жүйесі үшін U_i анықтаймыз.

$$\vec{U} = \gamma \int \frac{(\rho\vec{v})'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \gamma \sum_b \frac{m_b \vec{v}_b}{|\vec{r} - \vec{r}_b|}. \qquad (4)$$

мұндағы $\vec{r}_b$ - жүйені құрайтын денелердің радиус векторы. Мына жайтты ескере отырып

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_b|} = \frac{1}{r} + \frac{(\vec{r}\vec{r}_b)}{r^3} + \dots, \qquad (5)$$

$$(\vec{r}\vec{r}_b)\vec{v}_b = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\vec{r}_b(\vec{r}_b\vec{r}) + \frac{1}{2}\left[\vec{r}\left[\vec{v}_b\vec{r}_b\right]\right], \qquad (6)$$

(4) қайта жазамыз

$$\vec{U} = \frac{\gamma}{r}\frac{d}{dt}\sum_b m_b\vec{r}_b + \frac{\gamma}{2r^3}\frac{d}{dt}\sum_b \vec{r}_b(\vec{r}_b\vec{r}) + \frac{\gamma}{2r^3}\sum_b m_b\left[\vec{r}\left[\vec{v}_b\vec{r}_b\right]\right]. \qquad (7)$$

Бұл өрнектің уақыт бойынша орташа мәнін алайық.

$$\vec{U} = -\frac{\gamma}{2r^3}\left[\vec{r}\vec{S}_0\right] = \frac{\gamma}{2}\left[\vec{\nabla}\frac{1}{r}\vec{S}_0\right], \qquad (8)$$

белгілеулер енгіземіз

$$\vec{S}_0 = \sum_b \left[\vec{r}_b\, m_b\vec{v}_b\right], \qquad (9)$$

жүйенің импульсы. Қарастырылып отырған есептің лагранжианын жазамыз

$$L = -mc\frac{ds}{dt}. \qquad (10)$$

Ол үшін (3) тен табамыз

$$ds = cdt\left(1 - \frac{U + \frac{v^2}{2}}{c^2} + \frac{\frac{1}{2}U^2 - \frac{3}{2}Uv^2 - \frac{1}{8}v^4 + 4\left(\vec{U}\vec{v}\right)}{c^4}\right). \qquad (11)$$

(11) өрнегін (10) қойсақ

$$L = -mc^2 + m\left(U + \frac{v^2}{2}\right) - \frac{m}{2c^2}\left(U^2 - 3Uv^2 - \frac{1}{4}v^4 + 8\left(\vec{U}\vec{v}\right)\right). \qquad (12)$$

Импульс

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \left(1 + \frac{3U + \frac{v^2}{2}}{c^2}\right)m\vec{v} - \frac{4m}{c^2}\vec{U}. \qquad (13)$$

Гамильтониан

$$H = \vec{v}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = mc^2 + \frac{mv^2}{2} - mU + \frac{m}{2c^2}\left(U^2 + 3Uv^2 + \frac{3}{4}v^4\right) + \frac{4\left(\vec{p}\vec{U}\right)}{c^2} =$$

$$= mc^2 + \frac{p^2}{2m} - mU + \frac{mU^2}{2c^2} - \frac{3Up^2}{2mc^2} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \frac{4\left(\vec{p}\vec{U}\right)}{c^2}. \qquad (14)$$

Қозғалыс теңдеуін жазамыз

$$\dot{\vec{M}} = \left[\dot{\vec{r}}\vec{p}\right] + \left[\vec{r}\dot{\vec{p}}\right], \qquad (15)$$

$$\dot{\vec{A}} = \left[\frac{\dot{\vec{p}}}{m}\vec{M}\right] + \left[\frac{\vec{p}}{m}\dot{\vec{M}}\right] - \gamma m m_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right). \qquad (16)$$

Ары қарай

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m} - \frac{3U\vec{p}}{mc^2} - \frac{p^2\vec{p}}{2m^3c^2} + \frac{4\vec{U}}{c^2}, \qquad (17)$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\gamma m m_0}{r^3}\vec{r} - \frac{mU}{c^2}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \frac{3p^2}{2mc^2}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - \frac{4}{c^2}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(\vec{p}\vec{U}\right), \tag{18}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \left(1 - \frac{3U}{c^2} - \frac{p^2}{2m^2c^2}\right)\frac{\left[\vec{M}\vec{r}\right]}{mr^3} - \frac{4}{c^2r^3}\left[\vec{r}\left[\vec{r}\vec{U}\right]\right]. \tag{19}$$

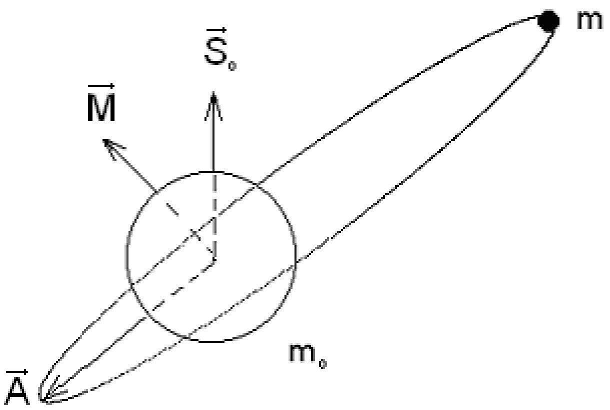
(17)-(19) қоямыз, сонда (15) және (16) былай жазылады

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{2\gamma}{c^2r^3}\left[\vec{S}_0\vec{M}\right], \tag{20}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = -\frac{\gamma m_0\left(4E + 6mU\right)}{mc^2r^3}\left[\vec{r}\vec{M}\right] + \frac{2\gamma}{c^2r^3}\left[\vec{S}_0\vec{A}\right] + \frac{6\gamma\left(\vec{S}_0\vec{M}\right)}{mc^2r^5}\left[\vec{r}\vec{M}\right]. \tag{21}$$

Ньютон эллипсі бойынша (20) және (21) орташалайық. [2, 426 б.] көрсетілгендей эллипстік орбита бойымен қозғалған кезде r-тың уақытқа тәуелділігінің параметрлік көрінісін пайдаланып орташалауды жүргізу ыңғайлы болады.

$$r = a\left(1 - e\cos\xi\right), t = \frac{T}{2\pi}\left(\xi - e\sin\xi\right), \tag{22}$$



Сурет 1.

Лензе-Тирринг есебі жағдайында векторлық элементтердің бағыттарын схемалық түрде көрсету

Мысалы:

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dt}{r^3} = \frac{1}{2\pi a^3}\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{\left(1 - e\cos\xi\right)^2}. \tag{23}$$

Осы және ұқсас интегралдарды есептеу үшін жалпы формуланы қолданамыз [3, 397 б.]

$$J_{n+1} = \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{(1 - e\cos\xi)^{n+1}} = \frac{2\pi}{(1 - e^2)^{\frac{n+1}{2}}} P_n\left(\frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}\right), \tag{24}$$

мұндағы P_n - Лежандр полиномы. Сондай ақ

$$\begin{aligned} &P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ &P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \ldots \end{aligned}, \tag{25}$$

(24) өрнегін ескере отырып

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \frac{1}{a^3(1 - e^2)^{3/2}}. \tag{26}$$

Бұл жерде орташалау импульс моментінің сақталуының релятивистік емес заңын қолдануға негізделген одан да қарапайым әдіспен жүзеге асырылады. Орташа мәнді тағы да қарастырайық. Сонда $r = \frac{P}{1 + e\cos\varphi}$ және $d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt$ ескере отырып,

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dt}{r^3} = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r} = \frac{m}{TMP}\int_0^{2\pi} (1 + e\cos\varphi)d\varphi. \tag{27}$$

Бұл интеграл қарапайым болып табылады, оны есептеу үшін (24) сияқты арнайы формула қажет те емес,

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \frac{m}{TMP}2\pi. \tag{28}$$

Бұл өрнек (28) пен сәйкес болуы үшін кеплер есебіндегі шамаларды еске түсіреміз

$$TM = 2mf, \; f = \pi ab, \; b = a\sqrt{1 - e^2}, \; P = a(1 - e^2), \tag{29}$$

мұндағы, f – орбит ауданы, b - эллипстің кіші жарты осі. Сонда

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \frac{\pi}{fP} = \frac{1}{abP} = \frac{1}{a^3\left(1-e^2\right)^{3/2}}. \tag{30}$$

Шварцшильд есебінің алдыңғы мазмұндамасына қарап

$$\overline{\frac{\vec{r}}{r^3}} = 0, \overline{\frac{\vec{r}}{r^4}} = \frac{e}{2a^3\left(1-e^2\right)^{3/2}}\vec{i}. \tag{31}$$

сонымен,

$$\overline{\frac{\vec{r}}{r^5}} = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi}\frac{\vec{e}_r d\varphi}{r^2} = \frac{2\pi me}{TMP^2}\vec{i} = \frac{e}{a^4\left(1-e^2\right)^{5/2}}\vec{i}. \tag{32}$$

Табылған орташа мәндерді ескере, (20) және (21) теңдеулерін мына түрде береміз

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \left[\vec{\Omega}_M\vec{M}\right], \tag{33}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\Omega}_A\vec{A}\right]. \tag{34}$$

Мұнда бұрыштық жылдамдықты енгімеміз

$$\vec{\Omega}_M = \frac{2\gamma\vec{S}_0}{c^2 a^3\left(1-e^2\right)^{3/2}}, \tag{35}$$

$$\vec{\Omega}_A = \frac{\gamma}{c^2 a^3\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left[\frac{3m_0}{m}\vec{M} + 2\left(\vec{S}_0 - 3\left(\vec{S}_0\vec{e}_M\right)\vec{e}_M\right)\right], \tag{36}$$

мұндағы $\vec{S}_0$ - момент шардың меншікті бұрыштық моменті (денелер жүйесі).

$\vec{\Omega}_M$ және $\vec{\Omega}_A$ екі мәнінің орнына ортақ бұрыштық жылдамдықты қарастырамыз

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_A, \tag{37}$$

(33) және (34) мына түрде қайта жазып шығамыз

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \left[\vec{\Omega}\vec{M}\right], \tag{38}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\Omega}\vec{A}\right]. \qquad (39)$$

Бұдан шығатыны $\vec{M}$ және $\vec{A}$ векторлары шамасы бойынша емес, бағыты бойынша өзгереді. $\vec{M}$ векторы $\vec{S}_0$ маңында бұрыштық жылдамдықпен айналады (35). $\vec{A}$ векторы бірден екі қозғалысқа қатысады: бұрыштық жылдамдықпен $\vec{S}_0$ айнала прецессияда (35) және орбиталық жазықтықта бұрыштық жылдамдықпен айналады

$$\vec{\Omega}_g = \frac{\gamma}{c^2 a^3 \left(1 - e^2\right)^{3/2}} \left[\frac{3m_0}{m}\vec{M} - 6\left(\vec{S}_0 \vec{e}_M\right)\vec{e}_M\right]. \qquad (40)$$

(35) сәйкес

$$\frac{\gamma}{a^3\left(1 - e^2\right)^{3/2}} = \frac{2\pi\gamma m}{TMP}, \qquad (41)$$

сонда

$$\vec{\Omega}_g = \frac{6\pi\gamma m_0}{TPc^2}\vec{e}_M - \frac{12\pi\gamma m\left(\vec{S}_0\vec{e}_M\right)}{TMPc^2}\vec{e}_M. \qquad (42)$$

Бұл өрнектің оң жағындағы бірінші мүшесі Шварцшильд есебіндегі $\vec{\Omega}_A = \frac{6\pi\gamma m_0}{TPc^2}\vec{e}_M$ бұрыштық жылдамдықпен сәйкес келеді, ал екінші мүшесі орталық дененің айналуына байланысты түзету болып табылады.

(36) өрнектен көрініп тұрғандай, орталық өрістің Ньютондық емес табиғатымен және дененің өзіндік айналуымен байланысты релятивистік эффектілер ұлғаяды. Осылайша, бұл әсерлерді бір-бірінен тәуелсіз зерттеуге болады (суперпозиция принципі).

Сонымен, $\vec{\Omega}$ қозғалатын координаталар жүйесінің x, y, z қозғалмайтын x_0 , y_0 , z_0 жүйеге қатысты бағытын анықтайтын ($\vec{i}_0$, $\vec{j}_0$, $\vec{k}_0$ бірлік векторлары бар) δ, g, i Эйлер бұрыштарының уақыт бойынша туындыларымен байланысты екенін атап өтеміз. Содан кейін [4, 165 б.]

$$\vec{\Omega} = \dot{\delta}\vec{e}_{z_0} + \dot{i}\vec{e}_\delta + \dot{g}\vec{e}_z, \qquad (43)$$

мұндағы $\vec{e}_\delta$ – xy және $x_0 y_0$ жазықтықтардың қиылысуынан пайда болатын түйіндер сызығының бірлік векторы. Егер z_0 осьін $\vec{S}_0$ бойымен бағытталған болса, онда (43) және (36) салыстыра отырып, аламыз

$$\dot{\delta} = \frac{2\gamma S_0}{c^2 a^3 \left(1 - e^2\right)^{3/2}}, \tag{44}$$

$$\dot{i} = 0, \tag{45}$$

$$\dot{g} = \frac{\gamma}{c^2 a^3 \left(1 - e^2\right)^{3/2}} \left[\frac{3m_0}{m} M - 6\left(\vec{S}_0 \vec{e}_M\right) \right]. \tag{46}$$

g мәнінің бір периодқа өзгергенін көреміз

$$\Delta g = \frac{6\pi\gamma m_0}{a\left(1 - e^2\right)c^2} - \frac{12\pi\gamma m\left(\vec{S}_0 \vec{e}_M\right)}{a\left(1 - e^2\right)Mc^2}. \tag{47}$$

сәйкесінше

$$\Delta\delta = \frac{4\pi\gamma m S_0}{a\left(1 - e^2\right)Mc^2}. \tag{48}$$

$\vec{S}_0 \uparrow\uparrow \vec{M}$ жағдайында, яғни сынақ денесінің қозғалысы орталық дененің экваторлық жазықтығында орын алса, перигелийдің периодтағы абсолютті ығысуын табуға болады [5, б. 35]:

$$\Delta g_{абс} = \Delta g + \Delta\delta = \frac{6\pi\gamma m_0}{a\left(1 - e^2\right)c^2} - \frac{8\pi\gamma m S_0}{a\left(1 - e^2\right)Mc^2}. \tag{49}$$

Қолданылған әдебиет

1. Тредер Г. Теория гравитации и принцип эквивалентности. М.: Атомиздат, 1973. 168 с.
2. Фок В.А. Начала квантовой механики. М.: Наука, 1976. 376 с.
3. Mandel H. Zur Herleitung der Feldgleichungen in der allgemeinen Relativitatsctheorie // Ibid. Bd. 39. S. 136-145.
4. Румер Ю.Б. Исследования по 5-оптике. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. 152 с.
5. Калуца Т. К проблеме единства физики // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 529-534.